

Ćwiczenie 10

RUCH PŁASKI NA PRZYKŁADZIE TOCZĄCEGO SIĘ KRAŻKA

10.1 WSTĘP

Celem ćwiczenia jest przeprowadzenie serii doświadczeń mających na celu wyznaczenie momentu bezwładności toczącej się po równi pochyłej bez poślizgu bryły. Ćwiczenie zostanie wykonane za pomocą urządzenia TM611 firmy GUNT [1]. Toczenie jest wynikiem m.in. działania sił grawitacji i nachylenia do poziomu toru, po którym zachodzi ruch bryły – w tym przypadku jest to krążek. Zarówno toczenie jak i ruch wahadłowy są ilustracjami powszechnie występującego w technice ruchu płaskiego. Wyznaczanie momentów bezwładności brył jest jednym z zadań identyfikacji elementów układów mechanicznych. Numeryczne narzędzia, których szybki rozwój można zaobserwować od połowy ubiegłego wieku pozwalają budować modele matematyczne skomplikowanych układów mechanicznych oraz wykonywać na nich szereg eksperymentów obliczeniowych. Wiarygodność uzyskiwanych za ich pomocą wyników zależy między innymi od wprowadzanych do programów obliczeniowych wartości parametrów układu. Informacje o tych parametrach uzyskuje się często na drodze empirycznej i ćwiczenie to pozwala na prostym przykładzie zobrazować ciąg badań związanych z doświadczalną częścią zadania identyfikacji.

10.2 PODSTAWY TEORETYCZNE

Zakres badań doświadczalnych obejmować będzie dwa zjawiska tzn. toczenie się bryły po torze prostym nachylonym do poziomu pod zadaniem kątem oraz ruch wahadła fizycznego.

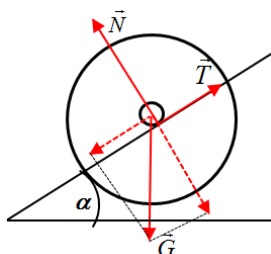
10.2.1. Swobodne toczenie się krążka

Rozważmy bryłę, zaopatrzoną w oś, na której leży jej środek masy i która może toczyć się bez poślizgu po prowadnicach nachylonych pod pewnym kątem do poziomu (rys. 1.)



Rys. 1. Schemat układu badanego w ćwiczeniu

Do bryły są przyłożone następujące siły (rys. 2.)



Rys. 2. Przykład sił działających na toczący się krążek

\vec{G} – ciężar bryły

\vec{N} – reakcja toru

\vec{T} – siła tarcia

Gdy założymy, że promień osi wynosi r , wtedy równania ruchu (przypadek ruchu płaskiego) są jak następuje:

$$\begin{aligned} J\varepsilon &= Tr \\ ma &= mg \sin(\alpha) - T \\ a - \varepsilon r &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązując je otrzymujemy:

$$a = \frac{mg \sin(\alpha)}{J + mr^2} r^2 \quad (1)$$

Uzyskana wartość przyspieszenia jest stała, a więc będziemy mieli do czynienia z jednostajnie przyspieszonym ruchem środka masy bryły.

Przy zerowych warunkach początkowych jej ruch będzie się wyrażał wzorem:

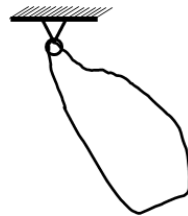
$$x = \frac{at^2}{2} \quad (2)$$

Znajomość długości trasy x , masy bryły m , kąta α i promienia r pozwala nam wyznaczyć wartość momentu bezwładności J .

$$J = \frac{mg \sin(\alpha)}{2x} r^2 t^2 - mr^2 \quad (3)$$

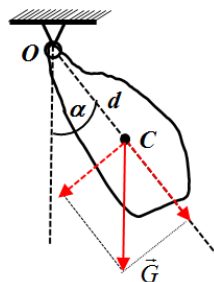
10.2.2. Ruch wahadła fizycznego [2]

Wahadło fizyczne jest to dowolna bryła sztywna mogąca obracać się dokoła osi nieprzechodzącej przez środek ciężkości tej bryły (rys. 3.)



Rys. 3. Wahadło fizyczne

Wahadło odchylone od pionu o kąt α , a następnie puszczone swobodnie, będzie wykonywać drgania zwane ruchem wahadłowym. W ruchu tym mamy do czynienia z obrotem bryły sztywnej wokół poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu. Ruch taki opisuje druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Zasady dynamiki dla ruchu postępowego, $m\ddot{x} = F$ i obrotowego, $J\ddot{\alpha} = M$, mają identyczny matematyczny opis. Dla wahadła fizycznego moment siły M powstaje pod wpływem siły ciężkości (rys. 4.).



Rys. 4. Siła ciężkości rozłożona na składowe powodujące ruch wahadłowy

\vec{G} – ciężar bryły

Dla wychylenia α jest moment siły jest równy $M=mgd \sin(\alpha)$, gdzie d oznacza odległość środka masy C od osi obrotu O. Zatem równanie ruchu wahadła można zapisać jako:

$$(J + md^2)\ddot{\alpha} = -mgd \sin(\alpha)$$

dla małych drgań możemy założyć $\sin(\alpha) \approx \alpha$ i w konsekwencji dostaniemy:

$$(J + md^2)\ddot{\alpha} + mgd\alpha = 0$$

Przekształcając to równanie do postaci:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$$

gdzie

$$\omega^2 = \frac{mgd}{(J + md^2)} \quad (4)$$

dostajemy równanie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązanie opisujące ruch drgający jest:

$$\alpha = A \cos(\omega t + \varphi)$$

A – zależy od początkowego wychylenia wahadła od położenia równowagi i od jego początkowej prędkości.

Między okresem drgań T , a ich częstotliwością ω istnieje zależność

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Znając okres drgań T , masę bryły m oraz odległość d środka masy od osi obrotu możemy wyznaczyć moment bezwładności bryły

$$J = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2 \quad (5)$$

10.2.3. Analiza błędów pomiarowych

Wykonując szereg pomiarów niezbędne jest statystyczne opracowanie otrzymanych wyników i analiza popełnionych błędów pomiarowych. Do podstawowych analiz statystycznych należy zaliczyć obliczanie wartości średniej zmiennej losowej, jaką są wyniki wykonanych pomiarów i jej wariancja.

Niech X będzie **zmienną losową typu dyskretnego**. Wartością oczekiwaną nazywa się sumę iloczynów wartości tej zmiennej losowej oraz prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane.

Jeżeli dyskretna zmienna losowa X przyjmuje wartości x_1, x_2, \dots, x_n z prawdopodobieństwami wynoszącymi odpowiednio p_1, p_2, \dots, p_n , to wartość średnia EX zmiennej losowej X wyraża się wzorem:

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

W naszym przypadku wzór ten będzie następujący:

$$EX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Wariancja jest średnią arytmetyczną kwadratów odchyłeń (różnic) poszczególnych wartości zmiennej losowej od wartości średniej.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - EX)^2$$

a w naszym przypadku:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2$$

Typowymi błędami szacowanymi przy analizie pomiarów są błąd przeciętny i średni błąd kwadratowy pomiaru – odchylenie standardowe.

Błędem przeciętnym nazywamy wielkość zdefiniowaną jako stosunek wartości bezwzględnej sumy odchyleń wyników pomiarów od jej wartości średniej do liczby wszystkich pomiarów.

$$|\Delta x| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - EX|$$

Średnim błędem kwadratowym (odchylenie standardowe) nazywamy pierwiastek stosunku sumy kwadratów odchyleń poszczególnych pomiarów od wartości średniej do liczby wszystkich pomiarów.

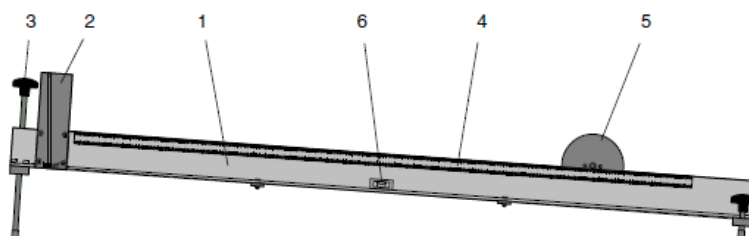
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - EX)^2}$$

10.3 OPIS STANOWISKA

Zestaw przyrządów do wykonywania ćwiczenia można podzielić na dwa zestawy – stanowisko do analizy ruchu krążka i stanowisko do analizy ruchu wahadła.

10.3.1 Stanowiska do analizy ruchu krążka

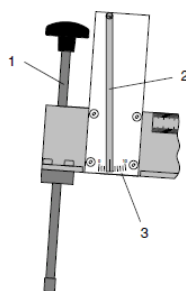
Ogólny widok stanowiska stosowanego do analizy ruchu krążka jest przedstawiony na rysunku 5.



Rys. 5. Widok stanowiska [1]

Stanowisko składa się z :
dwóch metalowych listew – bieżni – (1), które podparte w trzech punktach tworzą nachyloną płaszczyznę,
kątomierza – (2) pozwalającego mierzyć nachylenie płaszczyzny do poziomu,
regulatora wysokości – (3) pozwalającego na zmiany nachylenia płaszczyzny do poziomu,
linijek o długości 1000 mm – (4),
krążka – (5) wyposażonego w stożkowe osie, co umożliwi jego samocentrowanie się,
poziomic – (6) umożliwiających dokładne ustawienie stanowiska.

Szczegóły kątomierza i regulatora wysokości są pokazana na rysunku 6.

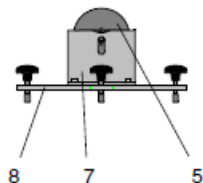


Rys. 6. Regulator nachylenia równi i kątomierz [1]

Obsługa tej części stanowiska polega na odkręcaniu lub wkręcaniu śruby – (1) aż do uzyskania żądanej wartości kąta nachylenia bieżni do poziomu pokazywanej przez wskazówkę – (2) na skali kątowej – (3).

10.3.2 Stanowisko do analizy ruchu wahadła

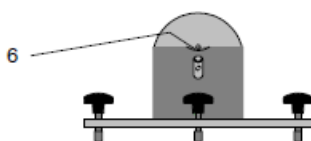
Stanowisko do badania ruchu wahadła fizycznego przedstawione jest na rysunku 7.



Rys. 7. Stanowisko do badania ruchu wahadła fizycznego [1]

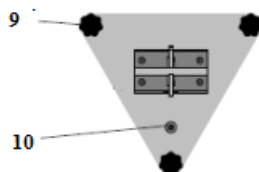
Składa się ono z:

podpór wahadła z otworami – (7) i płaskiej podstawy (8). Za pomocą bolca – (6) umieszczonego w otworze krążka tworzymy wahadło o osi obrotu przesuniętej względem środka masy krążka (rys. 8.)



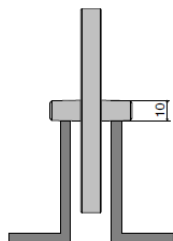
Rys. 8. Szczegóły stanowiska do badania ruchu wahadła [1]

Podstawę (rys. 9.) można wypoziomować korzystając z podpór o regulowanych wysokościach – (9) i poziomicy – (10)



Rys. 9. Podstawa stanowiska do badania ruchu wahadła [1]

W skład obu stanowisk wchodzi krążki o osi mającej kształt dwóch stożków ściętych przedstawione na rysunku 10. Krążki mają różne masy i wymiary.



Rys. 10. Krążek z wymiarem osi [1]

10.4 PRZEBIEG ĆWICZENIA

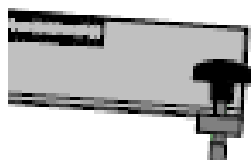
Ćwiczenie można podzielić na dwie części. Jedna dotyczy wyznaczenia momentu bezwładności przez pomiar czasu stoczenia się krążka, a druga przez pomiar okresu drgań wahadła fizycznego.

10.4.1 Wyznaczanie momentu bezwładności bryły sztywnej przez pomiar czasu stoczenia się krążka

W tej części ćwiczenia należy wielokrotnie wykonać pomiar czasu stoczenia się krążka z bieżni. Pomiarów należy dokonać dla obu krążków

Czynności:

1. Za pomocą regulatorów (rys. 11) ustawić bieżnię w pozycji poziomej



Rys. 11. Regulator ustawienia bieżni [1]

2. Ustawić kąt nachylenia bieżni na 1° operując regulatorem wysokości i obserwując wskazania kątomierza (rys. 6.).
3. Ustawić krążek (rys. 12.) na początku równi i puścić go swobodnie jednocześnie włączając stoper. Zarejestrować na stoperze czas przebycia drogi **1m**. Linijka znajduje się z boku równi (rys. 5.).



Rys. 12. Linijka na równi [1]

4. Pomiar należy powtórzyć trzykrotnie zapisując wyniki do protokołu wykonania ćwiczenia
5. Ustawić kąt nachylenia bieżni na 3° i powtórzyć trzykrotnie pomiary zapisując wyniki
6. Ustawić kąt nachylenia bieżni na 5° i powtórzyć trzykrotnie pomiary zapisując wyniki
7. Ustawić kąt nachylenia bieżni na 7° i powtórzyć trzykrotnie pomiary zapisując wyniki
8. Zmienić krążek i powtórzyć czynności od 2 do 7

10.4.2 Wyznaczanie momentu bezwładności bryły sztywnej przez pomiar okresu drgań wahadła fizycznego

W tej części ćwiczenia należy wielokrotnie wykonać pomiar okresu wahadła fizycznego. Pomiarów należy dokonać dla obu krążków

Czynności:

1. Wypoziomować podstawę (rys. 9.).
2. Włożyć bolec w otwór krążka, a następnie umieścić krążek w wycięciach stanowiska do badania drgań wahadła (rys. 7. i 8.)

3. Zarejestrować czas kilkunastu okresów (pełnych wahnień) drgań wahadła utworzonego przez krążek zapisując wyniki do protokołu. (zapisać należy czas pomiaru i liczbę okresów)
4. Pomiar czasu okresu powtórzyć trzykrotnie zapisując wyniki.
5. Zmienić krążek i powtórzyć czynności od 2 do 4.

10.4.3 Wykonanie obliczeń

Za pomocą programu o nazwie „ćwiczenie 10” można wykonać obliczenia momentu bezwładności.

Po uruchomieniu programu na ekranie komputera pokaże się okno:



Rys. 13. Główne okno sterujące programem obliczeniowym

Kliknięcie w guzik „Równia” spowoduje otwarcie formularza wprowadzania danych do pierwszej części ćwiczenia, a kliknięcie guzika „Wahadło” do drugiej części.

Formularz do pierwszej części jest przedstawiony na rysunku 14., a formularz do drugiej części na rysunku 15.

| Pomiar 1 | Pomiar 2 | Pomiar 3 | średnia | odch. std. |
|----------|----------|----------|---------|------------|
| 27.83 | 27.67 | 27.91 | 27.8033 | 0.099778 |
| 13.89 | 13.80 | 13.79 | 13.8267 | 0.044969 |
| 10.5 | 10.63 | 10.62 | 10.5833 | 0.059067 |
| 8.9 | 8.91 | 8.93 | 8.9133 | 0.012472 |

Rys. 14. Formularz wprowadzania danych do pierwszej części ćwiczenia

Rys. 15 Formularz wprowadzania danych do drugiej części ćwiczenia

Wypełnienie, na podstawie protokołu, formularzy a następnie kliknięcie w guzik „Oblicz” spowoduje w przypadku prawidłowo wykonanego doświadczenia obliczenie momentu bezwładności krążka (wzory 1, 2 i 3 oraz 4 i 5) i wygenerowanie zbioru z wynikami pomiarów.

Korzystając z sieci internetowej wyniki należy przesłać na adres osoby przygotowującej sprawozdanie z ćwiczenia.

10.5 ZAŁĄCZNIK

10.5.1 Dane techniczne stanowiska

| | |
|---|---|
| Główne wymiary stanowiska | długość x szerokość x wysokość 1200 x 300 x 280 mm |
| Masa | 10kg |
| Duży krążek | |
| zewnętrzna średnica | 100 mm |
| średnica części tocznej | 10 mm |
| średnica wahadła | 10 mm |
| Masa | 623g |
| Moment bezwładności względem osi symetrii | 0,000779 kgm ² |
| Mały krążek | |
| zewnętrzna średnica | 70 mm |
| średnica części tocznej | 10mm |
| średnica wahadła | 10 mm |
| Masa | 319g |
| Moment bezwładności względem osi symetrii | 0,000195 kgm ² |
| Nachylenie i długość bieżni | |
| max długość | 1000 mm |
| max. kąt nachylenia | 7° |

10.5.2 Postać zbiorów wynikowych

Zbiór wygenerowany po obliczeniu momentu bezwładności przez pomiar czasu stoczenia się krążka

Dane Pomiarowe Duży dysk

kat nachylenia Pomiar 1 Pomiar 2 Pomiar 3

| | | | |
|----------|--------------|--------------|--------------|
| <i>1</i> | <i>27.83</i> | <i>27.67</i> | <i>27.91</i> |
| <i>3</i> | <i>13.89</i> | <i>13.80</i> | <i>13.79</i> |
| <i>5</i> | <i>10.50</i> | <i>10.63</i> | <i>10.62</i> |
| <i>7</i> | <i>8.90</i> | <i>8.91</i> | <i>8.93</i> |

Wartosci statystyczne

kat nachylenia srednia odch. std blad przec.

| | | | |
|----------|------------------|-----------------|-----------------|
| <i>1</i> | <i>27.803333</i> | <i>0.099778</i> | <i>0.088889</i> |
| <i>3</i> | <i>13.826667</i> | <i>0.044969</i> | <i>0.042222</i> |
| <i>5</i> | <i>10.583333</i> | <i>0.059067</i> | <i>0.055556</i> |
| <i>7</i> | <i>8.913333</i> | <i>0.012472</i> | <i>0.011111</i> |

Obliczone Momenty

kat nachylenia Moment - wartosc srednia

| | |
|----------|-----------------|
| <i>1</i> | <i>0.001015</i> |
| <i>3</i> | <i>0.000749</i> |
| <i>5</i> | <i>0.000730</i> |
| <i>7</i> | <i>0.000724</i> |

MOMENT ŚREDNI = 0.000809

kat nachylenia przyspieszenie-wartosc srednia przyspieszenie-regresja

| | | |
|----------|-----------------|-----------------|
| <i>1</i> | <i>0.002587</i> | <i>0.003166</i> |
| <i>3</i> | <i>0.010462</i> | <i>0.010484</i> |
| <i>5</i> | <i>0.017856</i> | <i>0.017802</i> |
| <i>7</i> | <i>0.025174</i> | <i>0.025120</i> |

Zbiór wygenerowany po obliczeniu momentu bezwładności przez pomiar okresu drgań

Duży dysk

Pomiar 1 Pomiar 2 Pomiar 3 Pomiar 4

0.6500000 0.6550000 0.6570000 6.550000 Okres drgan [s]
*0.000789 0.000765 0.000755 0.000801 Obliczony moment [kg*m2]*

*Sredni moment 0.000783 kg*m2*

*Teoretyczny moment 0.000779 kg*m2*

Podobny zbiór uzyskuje się dla pomiarów małego dysku

LITERATURA

- [1] GUNT-Experiment Instructions-TM 611: Rolling disc on inclined plane
- [2] Leyko J.: Mechanika Ogólna – wydanie dowolne

10.5.3 Protokół pomiarowy do ćwiczenia

| Lp | Nazwisko i imię | Grupa | Nr zespołu | Data |
|----|-----------------|---|------------|------|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | <i>Podpis osoby prowadzącej ćwiczenie</i> | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |

Pomiar momentu bezwładności poprzez pomiar czasu stoczenia

Duży krążek

| kąt nachylenia równi w ° | Pomiar 1 [s] | Pomiar 2 [s] | Pomiar 3 [s] |
|--------------------------|--------------|--------------|--------------|
| $\alpha=1^\circ$ | | | |
| $\alpha=3^\circ$ | | | |
| $\alpha=5^\circ$ | | | |
| $\alpha=7^\circ$ | | | |

Mały krążek

| kąt nachylenia równi w ° | Pomiar 1 [s] | Pomiar 2 [s] | Pomiar 3 [s] |
|--------------------------|--------------|--------------|--------------|
| $\alpha=1^\circ$ | | | |
| $\alpha=3^\circ$ | | | |
| $\alpha=5^\circ$ | | | |
| $\alpha=7^\circ$ | | | |

Pomiar momentu bezwładności poprzez pomiar okresu drgań

Duży krążek

| Pomiar 1 [s] | Pomiar 2 [s] | Pomiar 3 [s] | Pomiar 4 [s] |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | | |

Mały krążek

| Pomiar 1 [s] | Pomiar 2 [s] | Pomiar 3 [s] | Pomiar 4 [s] |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | | |

10.5.4 Zawartość sprawozdania

- 1) Strona tytułowa wg ustalonego wzorca.
- 2) Protokół pomiarowy.
- 3) Formularz sprawozdania z wynikami.

Formularz sprawozdania

| Pomiar momentu bezwładności poprzez pomiar czasu stoczenia | | | | | | | |
|--|--------------|--------------|--------------|-----------------|------------------------|-----------------|--------------------------------------|
| Duży krążek | | | | | | | |
| kąt nachylenia równi w ° | Pomiar 1 [s] | Pomiar 2 [s] | Pomiar 3 [s] | Wartość średnia | Odchylenia standardowe | Błąd przeciętny | Wartość średnia momentu bezwładności |
| $\alpha=1^\circ$ | | | | | | | |
| $\alpha=3^\circ$ | | | | | | | |
| $\alpha=5^\circ$ | | | | | | | |
| $\alpha=7^\circ$ | | | | | | | |
| Wyznaczony po uśrednieniu moment bezwładności: | | | | | | | |
| Mały krążek | | | | | | | |
| kąt nachylenia równi w ° | Pomiar 1 [s] | Pomiar 2 [s] | Pomiar 3 [s] | Wartość średnia | Odchylenia standardowe | Błąd przeciętny | Wartość średnia momentu bezwładności |
| $\alpha=1^\circ$ | | | | | | | |
| $\alpha=3^\circ$ | | | | | | | |
| $\alpha=5^\circ$ | | | | | | | |
| $\alpha=7^\circ$ | | | | | | | |
| Wyznaczony po uśrednieniu moment bezwładności: | | | | | | | |

| Pomiar momentu bezwładności poprzez pomiar okresu drgań | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|-----------------|------------------------|-----------------|
| Duży krążek | | | | | | | |
| | Pom. 1 | Pom. 2 | Pom. 3 | Pom. 4 | Wartość średnia | Odchylenia standardowe | Błąd przeciętny |
| czas [s] | | | | | | | |
| Moment [kgm ²] | | | | | | | |
| Mały krążek | | | | | | | |
| | Pom. 1 | Pom. 2 | Pom. 3 | Pom. 4 | Wartość średnia | Odchylenia standardowe | Błąd przeciętny |
| czas [s] | | | | | | | |
| Moment [kgm ²] | | | | | | | |